Les nombres en différentes bases

I - Comment passer à la base 10.

Le système numérique utilisé aujourd'hui par les humains est construit à l'aide de dix différents symboles, soient 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Y a-t-il une raison particulière pour laquelle les humains ont choisi 10 différents symboles plutôt que 3 ou 7? Certains disent que c'est par pur hasard, tandis que d'autres suggèrent que c'est parce que nous sommes mûnis de 10 doigts. Nous ne le saurons probablement jamais d'une façon certaine.

En mathématiques, on dit que notre système numérique est *à la base 10* puisqu'on y trouve que dix symboles différents. Mais il est tout a fait possible de faire des mathématiques avec seulement deux symboles (on dit qu'il s'agit d'un système numérique *à la base 2*). Un systéme numérique construit qu'avec les symboles 0 et 1 est un système communément appelé le système numérique *binaire*. Le système numérique binaire est précisément celui utilisé par les ordinateurs pour faire les calculs. Le système numérique à la base 3 veut dire un système où tous les nombres ne sont faits qu'avec trois symboles, soient 0, 1, 2.

Un berger de l'antiquité aurait très bien pu compter ses moutons comme suit:

1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222, 1000, ...

Pour ne pas confondre le "100 à la base 3" du berger avec notre "100 à la base 10" (puisque que de toute évidence ils représentent des quantités différentes) on écrit 100_3 comme abréviation de "100 à la base 3". En comptant très attentivement on voit que pour le berger, 111_3 moutons c'est $13 = 13_{10}$ moutons pour nous.

Les ordinateurs ne comptent qu'en utilisant le système binaire, soit 0_2, 1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2, 1000_2, 1001_2, 1010_2, 1011_2, 1100_2, 1101_2, 1110_2, 1111_2, $10000_2 \ldots$

Si un berger qui ne compte qu'à la base 2 voulait vous vendre 10010111101_2 moutons pour un prix fixe, il serait utile pour vous de savoir combien de moutons il s'agit afin de bien décider si vous en avez pour votre argent. Pour bien comprendre combien de moutons il tente de vous vendre vous procédez comme suit:

- Vous notez d'abord que $10_2 = 2$ à la base 10. (Nous nous entendons que si on indique pas la base il s'agit de la base 10)
- On interprète le nombre 10010111101_2 comme suit:
  (Ne vous laissez pas intimider par la grandeur de numéros!)

$$
\begin{aligned}
10010111101_2 \;=\; & 1\times 10000000000_2 + 0\times 1000000000_2 + 0\times 100000000_2\\
& +1\times 10000000_2 + 0\times 1000000_2 + 1\times 100000_2\\
& +1\times 10000_2 + 1\times 1000_2 + 1\times 100_2\\
& +0\times 10_2 + 1\times 1_2
\end{aligned}
$$

Et donc on peut écrire en utilisant la notation exponentielle:

$$
\begin{aligned}
10010111101_2 \;=\; & 1\times (10_2)^{10} + 0\times (10_2)^9 + 0\times (10_2)^8\\
& +1\times (10_2)^7 + 0\times (10_2)^6 + 1\times (10_2)^5\\
& +1\times (10_2)^4 + 1\times (10_2)^3 + 1\times (10_2)^2\\
& +0\times (10_2)^1 + 1\times (10_2)^0
\end{aligned}
$$

En substituant $10_2 = 2$:

$$
\begin{aligned}
10010111101_2 \;=\; & 1\times 2^{10} + 0\times 2^9 + 0\times 2^8\\
& +1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5\\
& +1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2\\
& +0\times 2^1 + 1\times 2^0
\end{aligned}
$$

Soit, avec l'aide d'une calculatrice, si nécessaire:

$10010111101_2 = 1\times 1\ 024 + 0\times 512 + 0\times 256 + 1\times 128 + 0\times 64 + 1\times 32$

$+1\times 16 + 1\times 8 + 1\times 4 + 0\times 2 + 1\times 1$

$= 1\ 213$ moutons.

- Si on veut trouver l'équivalent d'un nombre à la base 3 ou à la base 15 on procède toujours de la même façon.