

Techniques de comptage I (Dénombrément)

Ils nous arrive parfois de vouloir compter le nombre “d’objets” dans un ensemble quelconque. Les “objets” en question peuvent être des nombres, des lettres ou autres entités mathématiques. Mais si la quantité d’objets dans l’ensemble est énorme il est souvent impossible de les compter un par un. Il est donc bon d’avoir à notre disposition des *techniques de comptage*. Nous examinons ici une première technique.

- Nous commençons par un exemple.
 - Supposons que nous voulons placer dans ces deux boîtes $\square \square$ des lettres et des chiffres. Dans la première boîte on ne met que des lettres tandis que dans la seconde boîte on ne met que des chiffres $0, 1, 2, \dots, 8, 9$.
 - Combien de différentes façons peut-on remplir les deux boîtes sans en laisser ni une ni l’autre vide?
 - * Nous allons les compter d’une façon systématique s’assurant que nous les ayons tous comptés, sans en oublier et sans compter une paire lettre-chiffre deux fois.
 - * Choisissons de mettre un a dans la première boîte : $\boxed{a} \square$
 - * Avec un a dans la première boîte il y a 10 différentes façons de remplir la deuxième, soit avec $0, 1, 2, \dots, 8, 9$.
 - * Si on choisit de mettre un b dans la première boîte : $\boxed{b} \square$ il y a encore une fois 10 différentes façons de remplir la deuxième.
 - * Puisqu’il y a 26 lettres dans l’alphabet, nous en déduisons qu’il y aura exactement $26 \times 10 = 260$ différentes façons de remplir les deux boîtes.
 - Nous faisons une autre expérience. Une garçon possède 3 différentes paires de souliers, 5 paires de pantalons différents et 7 chemises différentes. Pour aller à l’école il porte toujours une combinaison de ces souliers, pantalons et chemises. Combien de différentes façons peut-il s’habiller pour se rendre à l’école?
 - * Nous commençons par compter les différentes combinaisons pantalon-chemises qui lui sont possibles. En faisant comme nous l’avons fait dans le premier exemple il y a $5 \times 7 = 35$ différentes combinaisons de pantalon-chemises.
 - * Donc pour chacune de ses 3 paires de souliers il y a 35 différentes combinaisons pantalon-chemises possibles.
 - * Donc il a, en tout, exactement $3 \times 5 \times 7 = 105$ différentes façons de s’habiller pour aller à l’école.

Ces exemples nous suffisent pour énoncer et comprendre un principe important de comptage (dénombrement):

Soient n boîtes. S'il y a m_1 façons de remplir la première boîte, m_2 façons de remplir la deuxième boîte, et ainsi de suite jusqu'à m_n façons de remplir la $n^{\text{ème}}$ boîte il y a exactement $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n$ différentes façons de remplir les n boîtes (sans en laisser de boîtes vides).

Nous faisons un autre exemple.

Combien de nombres à 5 chiffres y a-t-il qui sont impairs et qui ne sont pas divisibles par 5?

- Pour la case des dix mille il y a exactement 9 différentes façons de la remplir, soit avec 1, 2, 3, ..., 8, 9 (en notant qu'on ne peut pas mettre le 0 dans cette case puisqu'il nous faut un numéro de 5 chiffres).
- Pour les cases réservées aux milliers, aux centaines et au dizaines nous pouvons y mettre dans chacune d'entre elles 10 chiffres, soient, 0, 1, 2, ..., 8, 9.
- Dans la case des unités on ne peut y mettre que des nombres impairs non-divisibles par 5, ce qui exclut tous les chiffres pair (y inclus le 0) et le 5, et donc les seuls chiffres qu'on peut y mettre sont 1, 3, 7 et 9 soient 4 chiffres.
- Donc en appliquant le principe énoncé ci-dessus il y a précisément $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 4 = 36\,000$ nombres à 5 chiffres qui sont impairs et qui ne sont pas divisibles par 5.