Équations algébriques

Résolution de 2 équations à 2 inconnus

Certaines équations contiennent deux variables plutôt qu'une. Par exemple:

$$x + y = 8 \tag{1}$$
$$3 + y = 2x \tag{2}$$
$$\frac{x}{y} = 2 \tag{3}$$

On voit que pour de telles équations il y a un nombre infini de solutions pour x et y.

- Dans l'équation 1, on peut donner une valeur arbitraire à x et trouver une valeur correspondante pour y.
  - Si $x = 1$ il faut que $y = 7$, si $x = 100$ il faut que $y = -92$.
- Il est de même pour l'équation 2.
  - Si $x = 1$ il faut que $y = -1$, si $x = 100$ il faut que $y = 197$.
- Pour l'équation 3:
  - Si $x = 4$ il faut que $y = 2$, si $x = 1$ il faut que $y = \frac{1}{2}$.

Il peut nous arriver de vouloir trouver les valeurs de x et y qui satisfont deux équations algébriques en x et y simultanément. Voici un exemple.

- Supposons que nous cherchions toutes les paires de numéros x et y tels que leur somme est 50 mais que le triple d'un chiffre égale 4 de plus que 2 fois l'autre.
  - Nous cherchons les valeurs de x et y qui satisfont les deux équations suivantes, simultanément:
$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 4 = 3y \end{cases}$$

Il y a deux techniques qu'on peut utiliser pour résoudre ce genre de problème. On peut utiliser une ou l'autre technique, la réponse obtenue sera la même.

1. La **méthode de substitution**. Soit le système de deux équations à deux inconnus:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 4 = 3y \end{cases}$$

- Cette technique se résume comme suit: "*Nous isolons une variable dans une équation et nous substituons sa valeur dans la deuxième équation.*"
  - La première étape:

$$\begin{array}{lcl} x+y &=& 50 \\ x+y-x &=& 50-x \\ y &=& 50-x \end{array}$$

  - La deuxième étape:

$$\begin{array}{lcl} 2x+4 &=& 3y \\ 2x+4 &=& 3(50-x) \end{array}$$

  - Troisième étape, la résolution pour x:

$$\begin{array}{lcll} 2x+4 &=& 3(50-x) & \\ 2x+4 &=& 150-3x & \text{(Principe de distributivité)} \\ 2x+3x &=& 150-4 & \\ 5x &=& 146 & \\ x &=& \frac{146}{5} & \end{array}$$

  - Quatrième étape, la substitution de cette valeur pour x dans la première équation afin de résoudre pour y.

$$\begin{array}{lcl} x+y &=& 50 \\ \frac{146}{5}+y &=& 50 \\ y &=& 50-\frac{146}{5} \\ y &=& \frac{250}{5}-\frac{146}{5} \\ y &=& \frac{104}{5} \end{array}$$

  - La solution: les deux numéros x et y sont, $x=\frac{146}{5}$ et $y=\frac{104}{5}$

2. La **méthode de réduction**. Soit, encore une fois, le système de deux équations à deux inconnus:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x+y &=& 50 \\ 2x+4 &=& 3y \end{array} \right.$$

- Cette technique se résume comme suit: "*La manipulation algébrique d'une équation de façon à ce que la somme des deux équations fasse disparaître une variable.*"

- La première étape, réécrire les équations comme suit:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 50 \\ 2x+-3y & = & -4 \end{array}\right.$$

- La deuxième étape:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2(x+y) & = & -2(50) \\ 2x+-3y & = & -4 \end{array}\right.$$

  ce qui donne:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -2x & + & -2y & = & -100 \\ 2x & + & -3y & = & -4 \end{array}\right.$$

- La troisième étape, additionner les côtés gauches et les côtés droits des 2 équations:

$$(-2x+2x)+(-2y+-3y) = -100+-4$$

  ce qui donne, en simplifiant

$$-2y+-3y = -104$$

  ou encore

$$-5y = -104$$

- Finalement on obtient la valeur de y:

$$y = \frac{-104}{-5} = \frac{104}{5}$$

- Pour trouver la valeur de x on substitue cette valeur de y dans la première équation:

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & 50 \\ x+\frac{104}{5} & = & 50 \end{array}$$

  et donc

$$\begin{array}{rcl} x & = & 50-\frac{104}{5} \\ x & = & \frac{250}{5}-\frac{104}{5} \\ x & = & \frac{146}{5} \end{array}$$