Le Principe d'induction mathématique

Le *Principe d'induction mathématique* est un principe fondamental des mathématiques. Dans les livres de mathématiques on l'exprime ordinairement comme suit:

> Si nous avons un nombre infini d'énoncés $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ et que nous avons démontré de façon irréfutable que
>
> 1. P_1 est vrai (ce critère est parfois appelée la *condition de base*)
> 2. si P_n est vrai, il faut que P_{n+1} soit vrai, (appelé *l'énoncé d'induction*)
>
> on doit conclure que P_n est vrai peu importe la valeur de n.

Nous présentons le Principe d'induction mathématique d'une façon un peu plus concrète dans l'exemple suivant:

- Supposons que nous ayons un jeu dans lequel on nous a fourni un nombre infini de petits billets de papier.
- Tous les billets sont numérotés de la façon suivante: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$.
- Supposons également que le jeu comprenne deux boîtes, la première étant étiquetée d'un V la deuxième d'un F.
- Chaque billet contient l'une des deux directives: *Dépose-moi dans la boîte* V ou *Dépose-moi dans la boîte* F.
- Le jeu se joue à deux. Le joueur qui aura déposé le plus de billets dans la boîte V remporte la partie. Chaque joueur déposera à tour de rôle un billet dans une des deux boîtes en respectant les règles suivantes:
  1. Le joueur qui commence pige un billet et le lit tout fort. (On décide qui commence le jeu par le lancement d'un dé). Si le billet contient la directive *Dépose-moi dans la boîte* V le joueur doit déposer le billet dans la boîte V, si le billet contient la directive *Dépose-moi dans la boîte* F le joueur doit déposer le billet dans la boîte F.
  2. À partir du moment où un joueur se voit dans l'obligation de déposer un billet dans la boîte F ce sera au tour de son adversaire de jouer en pigeant un billet.
  3. Il y a une seule exception à la règle 1: Chaque fois qu'un joueur a déposé un billet dans la boîte V il a le droit de jouer encore, c'est-à-dire de piger un autre billet et de le déposer dans la boîte V **peu importe la directive que lui dictera ce billet**.

- Le *Principe d'induction mathématique* nous dicte que si le premier joueur pige un billet qui lui dicte *Dépose-moi dans la boîte* V il déposera éventuellement tous les billets dans la boîte V et remportera donc la partie.

Voici un exemple où nous utilisons le Principe d'induction mathématique pour démontrer qu'un énoncé mathématique est vrai.

Une élève s'amuse à trouver les sommes suivantes: $1+2+3=6$, $1+2+3+4+5=15$, $1+2+\cdots+9=45$. Elle se demande s'il n'y aurait pas une façon plus simple de trouver la somme d'une telle suite de numéros. Elle cherche un patron et observe que

$$\begin{array}{lcccc} 1+2+3 & = & \frac{3\times 4}{2} & = & 6 \\ 1+2+3+4+5 & = & \frac{5\times 6}{2} & = & 15 \\ 1+2+\cdots+9 & = & \frac{9\times 10}{2} & = & 45 \end{array}$$

À partir de cette expérience elle émet l'hypothèse suivante: $1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$ peu importe la valeur du dernier numéro n. Elle décide de démontrer la véracité de cet énoncé en utilisant le Principe d'induction mathématique.

- Elle écrit P_n est l'énoncé $1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$ où n prend les valeurs $n=1$, $n=2$, $n=3$, et ainsi de suite.

- Elle constate qu'elle a devant elle un nombre infini d'énoncés dont les premiers sont:

$$\begin{array}{lclcccc} P_1 & : & 1 & = & \frac{1\times 2}{2} & = & 1 \\ P_2 & : & 1+2 & = & \frac{2\times 3}{2} & = & 3 \\ P_3 & : & 1+2+3 & = & \frac{3\times 4}{2} & = & 6 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

- Elle veut démontrer que P_n est vrai peu importe la valeur de n.

- Elle a déjà vérifié que la *condition de base* est satisfaite: $P_1 = 1 = \frac{1\times 2}{2}$.

- Elle décide de vérifier si la *condition d'induction* est satisfaite:
  - Supposons que l'énoncé soit vrai pour la valeur n, c'est-à-dire que P_n est vrai.
  - Elle vérifie donc que P_{n+1} doit également être vraie:
    - Nous avons comme hypothèse que $1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$

* Donc

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

- Elle en déduit que

$$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

- La condition d'induction est satisfaite. C'est-à-dire, si P_n est vrai, il faut que P_{n+1} soit vrai.
- Le *Principe d'induction mathématique* nous dicte donc que P_n est vrai pour toutes les valeurs de n.
- C'est-à-dire,

$$1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

pour toutes les valeurs de n.

Voici un deuxième exemple.

Est-ce vrai que le numéro 7 divise $2^{n+2}+3^{2n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$?

Réponse:

Nous utiliserons le Principe d'induction mathématique pour tenter de répondre à la question.

- L'énoncé P_n est défini comme suit: $P_n =$ " 7 divise $2^{n+2}+3^{2n+1}$"
- Vérifions la *condition de base*: P_1 est vrai puisque $2^{1+2}+3^{2\times1+1}=8+27=35=5\times7$.
- Nous passons à la *condition d'induction*:

- Supposons que l'énoncé P_n soit vrai pour une valeur de n, c'est-à-dire, " 7 divise $2^{n+2} + 3^{2n+1}$".
  - $*$ Ceci veut dire que $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 7k$ pour un entier k quelconque.
- Nous vérifions s'il en découle que 7 divise $2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1}$:

$$\begin{aligned}
2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1} &= 2^{(n+2)+1} + 3^{2n+2+1} \\
&= 2 \cdot 2^{(n+2)} + 3^{2n+1+2} \\
&= 2 \cdot 2^{(n+2)} + 3^2 \cdot 3^{2n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{(n+2)} + 9 \cdot 3^{2n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{(n+2)} + (2+7) \cdot 3^{2n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{(n+2)} + 2 \cdot 3^{2n+1} + 7 \cdot 3^{2n+1} \\
&= 2 \cdot \left(2^{(n+2)} + 3^{2n+1}\right) + 7 \cdot 3^{2n+1} \\
&= 2 \cdot 7k + 7 \cdot 3^{2n+1} \\
&= 7 \cdot \left(2k + 3^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

- Donc $2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1} = 7 \cdot \left(2k + 3^{2n+1}\right)$, un multiple de 7.
- Il en découle que 7 divise $2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1}$.

• En invoquant le Principe d'induction mathématique nous concluons que 7 divise $2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

© Club Pythagore, 2007