

Les nombres irrationnels.

Les *nombres irrationnels* sont définis comme étant tout nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'un rapport de nombres entiers. C'est-à-dire, tout nombre n pour lequel il n'existe pas d'entiers a et b où $n = \frac{a}{b}$. On peut se demander si de tels nombres existent!

Nous allons nous satisfaire ici d'en nommer que un. Nous démontrerons que la $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, et donc est irrationnel.

- Supposons que la $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
- Donc il existe deux entiers a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
 - Nous allons choisir a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible. Ceci veut dire qu'on ne peut par réduire davantage cette fraction. En particulier, il n'est pas possible que les nombres a et b soient tous deux des nombres pairs, car il est toujours possible de réduire davantage un rapport de nombres pairs un divisant à la fois le numérateur et le dénominateur par 2.
- Nous mettons les deux côtés de l'équation $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ au carré pour obtenir $2 = \frac{a^2}{b^2}$
- Donc $2b^2 = a^2$. Il s'en suit que le nombre a^2 est un nombre pair.
 - Puisqu'un nombre impair multiplié par un nombre impair est toujours impair, il faut que l'entier a soit également pair.
 - Et donc, il existe un entier k tel que $a = 2k$.
 - Puisque $a = 2k$ nous avons $a^2 = 4k^2$.
- Il en résulte l'équation $2b^2 = 4k^2$, ou en simplifiant $b^2 = 2k^2$.
- On doit donc conclure que l'entier b^2 est un entier pair. Et donc b doit être pair.
- Mais nous nous étions entendus que les entiers a et b ne pouvaient pas tous deux être pairs!
- Pour éviter cette contradiction, nous devons conclure qu'il n'est pas possible que $\sqrt{2}$ ait la forme d'un rapport de deux entiers $\frac{a}{b}$.
- Nous avons démontré que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.