Le plus petit multiple commun de deux entiers positifs

- Supposons que nous ayons deux entiers 54 et 12. Nous cherchons un nombre qui est à la fois un multiple de 54 et un multiple de 12.
  - Il est facile d'en trouver un: on multiplie $12 \times 54 = 648$. Il est évident que 12 divise 648 et 54 divise 648 et donc 648 est un multiple commun aux deux entiers.
- Mais il peut nous arriver de vouloir un multiple de ces deux entiers qui est plus petit que 648.
  - Et si nous en trouvons un, disons 216, comment savoir s'il n'y en aurait pas un autre multiple des deux nombres qui serait encore plus petit?
  - Nous serions donc à la recherche du *plus petit multiple commun de 54 et 12*. Nous dénoterons se nombre par PPMC(12, 54). Comment faire pour le trouver? Nous examinons une technique sûre et certaine.
    - Nous factorisons en facteurs premiers les nombres 12 et 54. (Voir le Concept sur la factorisation si vous ne l'avez pas encore fait).
    - Nous obtenons $12 = 2^2 \cdot 3$ et $54 = 2 \cdot 3^3$
    - Nous construirons le PPMC(54, 12) à l'aide des facteurs premiers qui paraissent dans les deux nombres. Mais il faut que chacun de ces nombres premiers soit à puissance la plus élevée qui parait parmi les facteurs de ces deux nombres. Par exemple, $\text{PPMC}(54, 12) = 2^2 \cdot 3^3 = 108$.
- Voici un autre exemple: Trouver le PPMC(35 640, 326 700)
  - Nous factorisons nos deux nombres en facteurs premiers: $35\,640 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11$ et $326\,700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2$.
  - Donc $\text{PPMC}(35\,640, 326\,700) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^2 = 1\,960\,200$.
- Exemple: Supposons que l'âge d'un arbre est égal à un entier n qui est inférieur à 2000 ans. Supposons que les trois entiers 24, 18 et 25 divisent n. Quel est l'âge de l'arbre?

  Solution:

- Puisque les trois entiers 24, 18 et 25 divisent n ceci veut dire que n est un multiple de 24, 18 et 25.
- Cherchons la plus petite valeur possible de n. Cette valeur est le plus petit multiple commun de 24, 18 et 25.
- Pour ce faire nous factorisons les trois entiers en facteurs premiers:

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \cdot 3 \\ 18 &= 2 \cdot 3^2 \\ 25 &= 5^2 \end{aligned}$$

- Donc le plus petit multiple commun est $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$
- D'autres multiples communs tel que 1800×2 par exemple dépassent la limite de 2000 ans.
- Donc l'âge de l'arbre doit être de 1800 ans.

• Exemple: Supposons que l'âge d'un arbre est égal à un entier n qui est inférieur à 2000 ans. Supposons que lorsqu'on divise n par 24, 18 ou 25 on obtient un reste de 7 pour chacun. Quel est l'âge de l'arbre?

Solution:

- Puisque les trois entiers 24, 18 et 25 divisent n pour obtenir, pour chacun d'entre eux un reste de 7 on utilise l'algorithme de la division pour exprimer ce fait (Voir le concept *Division: l'algorithme de la division* sur la page de Concepts mathématiques:

$$\begin{aligned} n &= 24 \cdot q_1 + 7 \\ n &= 18 \cdot q_2 + 7 \\ n &= 25 \cdot q_3 + 7 \end{aligned}$$

  où q_1 est le quotient de $n \div 24$, q_2 est le quotient de $n \div 18$ et q_3 est le quotient de $n \div 25$.
- On peut réécrire les trois équations comme suit:

$$\begin{aligned} n-7 &= 24 \cdot q_1 \\ n-7 &= 18 \cdot q_2 \\ n-7 &= 25 \cdot q_3 \end{aligned}$$

- On voit que $n-7$ est un multiple des trois entiers 24, 18 et 25.

- Cherchons la plus petite valeur possible de $n - 7$. Cette valeur est le plus petit multiple commun de 24, 18 et 25.
- Nous l'avons déjà déterminée dans l'exemple précédant: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1\,800$
- Donc $n - 7 \geq 1\,800$.
- D'autres multiples communs tel que $1\,800 \times 2$ par exemple impliqueraient que $n - 7 \geq 3\,600$ et donc $n > 2\,000$; sachant que l'arbre a moins de 2 000 ans on doit conclure que $n - 7 = 1\,800$.
- On en déduit que l'âge de l'arbre est $n = 1\,793$