

Séries numériques.

À noter: Lire les fichiers sur les suites numériques avant de lire ce document.

Une *série numérique* est la somme de tous les termes d'une suite numérique. Voici quelques exemples.

- a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$
- b) $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27 + \dots$
- c) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- d) $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots$

Étant donné que nous ne savons pas comment additionner un nombre infini de numéros nous devons définir ce qu'est la valeur d'une série numérique et développer des techniques efficaces pour les évaluer.

Trouvons d'abord une méthode efficace pour exprimer une série.

- Puisqu'une série est la somme des termes d'une suite, il serait utile de pouvoir écrire cette suite sans être obligé d'écrire les quelques premiers termes à chaque fois.

– Il faut donc trouver une formule pour le $n^{\text{ème}}$ de la suite. Nous utiliserons les séries décrites ci-dessus comme exemple.

- a) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\} = \{\frac{1}{2^n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$
- b) $\{2, 7, 12, 17, 22, 27 + \dots\} = \{2 + 5n : n = 0, 2, 3, \dots\}$
- c) $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, + \dots\} = \{1^{n+1} : n = 1, 2, 3, \dots\}$
- d) $\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\} = \{\frac{n+1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$

- Le symbole utilisé pour décrire une somme est le “sigma” majuscule, \sum (il s'agit de la lettre grecque pour le S majuscule). Pour décrire une somme le sigma doit être accompagné d'un index nous permettant de savoir où commence et où se termine la somme. Par exemple on peut décrire de façon très succincte la somme $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 96 + 99$ comme suit:

$$3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 96 + 99 = \sum_{n=1}^{33} 3n$$

On lit “somme, $n = 1$ à 33 de $3n$ ”

- Nous utiliserons la notation du *sigma* pour décrire les séries ci-dessus. Le symbole ∞ signifie que la somme ne s'arrête jamais.

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\text{b) } 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2 + 5n$$

$$\text{c) } 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 1^{n+1}$$

$$\text{d) } \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$$

– Nous décrivons en détails la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2}$ comme suit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2} = \frac{2}{1} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \dots$$

- Une série dont les termes appartiennent à une suite géométrique s'appelle une *série géométrique*.
- La valeur d'une série infinie, si elle existe, est en réalité la limite d'une suite. Nous utiliserons l'exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ pour démontrer une façon de déterminer cette somme.

– Définissons tout d'abord une suite à l'aide de cette série:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

– La suite numérique $\{S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n, \dots\}$ converge vers la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

– À partir de l'expression

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

on effectue les opérations suivantes:

$$\begin{array}{r} S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + 0 \right) \\ - \left(\frac{1}{2} \right) S_n = - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ \hline S_n - \left(\frac{1}{2} \right) S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \end{array}$$

– Puisqu'on a

$$S_n \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

on en déduit que $S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$.

– Lorsque l'index $n \rightarrow \infty$, l'expression $S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$ tend vers $\frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

– Puisque S_n tend vers $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ on peut conclure que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

- Le tableau suivant confirme ce que nous venons de déduire algébriquement sur la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

S_1	=	0.5
S_2	=	0.75
S_3	=	0.875
S_4	=	0.9375
S_5	=	0.96875
S_6	=	0.984375
S_7	=	0.9921875
S_8	=	0.99609375
S_9	=	0.998046875
S_{10}	=	0.999023438
S_{11}	=	0.999511719
S_{12}	=	0.999755859
S_{13}	=	0.999877930
S_{14}	=	0.999938965
S_{15}	=	0.999969482
S_{16}	=	0.999984741
S_{17}	=	0.999992371
S_{18}	=	0.999996185
S_{19}	=	0.999998093