Convergence des suites numériques.

Pour certaines suites numériques la valeur des termes de la suite semblent s'approcher d'un nombre particulier à mesure que l'index de la suite devient de plus en plus grand.

- Par exemple, la suite

$$\left\{3,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{8},\ \ldots\right\} = \left\{2+\frac{1}{2^n} : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

  se rapproche du nombre 2 à mesure que son index n tend vers l'infini. C'est pourquoi nous disons que cette suite a une limite égale à 2. On écrit

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2+\frac{1}{2^n}\right\} = 2.$$

  - Mais pas toutes les suites numériques ont une limite. Par exemple, il est évident que la suite

$$\{2, 7, 12, 17, 22, \ldots\} = \{2+5n : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

    ne converge pas vers un numéro. Les termes deviennent arbitrairement grands. On dit que cette suite tend vers l'infini et on écrit

$$\lim_{n\to\infty}\{2+5n\} = \infty$$

- Il est parfois difficile de déterminer ce qu'est la limite d'une suite (si elle existe!). Ainsi nous devons avoir recourt à certaines techniques qui nous permettent, très souvent, de trouver cette limite. Par exemple, supposons que nous cherchons la limite de la suite

$$\left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right\}$$

  - Nous devons tout d'abord trouver la forme du $n^{\text{ème}}$ terme:

$$\left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right\} = \left\{\frac{n+1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

  - Ensuite, il nous faut faire un peu d'algébre...

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

- ...suivit d'un peu d'analyse: chaque terme de la suite peut s'écrire sous la forme $1 + \frac{1}{n}$ et lorsque n devient arbitrairement grand $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et donc $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1.
- On doit conclure que la suite $\left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right\}$ a une limite égale à 1. C'est-à-dire elle converge vers 1 à mesure que son index n tend vers l'infini.

Nous n'allons pas nous pencher ici sur les techniques utilisées par les universitaires pour trouver les limites de suites. Il suffit ici de voir que les suites numériques suscitent l'intérêt des mathématiciens et mathophiles et qu'elles sont fondamentales pour l'étude des nombres réels entreprise en première année de l'université.

Questions: D'après vous, vers quel nombre convergent les suites suivantes?

a) $\{0,3, \quad 0,33, \quad 0,333, \quad 0,3333, \quad 0,33333, \quad 0,333333, \ldots\}$

b) $\{3,1, \quad 3,14, \quad 3,141, \quad 3,1415, \quad 3,14159, 3,141592, \ldots\}$