Les suites numériques.

Une *suite numérique* est un ensemble infiniment grand de numéros placés dans un ordre déterminé. Les suivants sont tous des exemples assez simples de suites numériques:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

c) $-2, 1, 0, 1, -2, 3, -4, 5, -6 \ldots$

d) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

Ordinairement une suite numérique n'a d'intérêt que dans la mesure où il existe une régle qui nous permet de déduire le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite.

- Par exemple dans la première suite ci-dessus le lecteur déduit rapidement que le $10^{\text{ème}}$ terme est $\frac{1}{10}$, le $1\,000^{\text{ème}}$ terme est $\frac{1}{1\,000}$ et donc que le $n^{\text{ème}}$ terme est $\frac{1}{n}$.
  - On représente donc, d'une façon un peu plus succincte cette suite comme étant $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3 \ldots\}$ ou tout simplement $\{\frac{1}{n}\}$
- Quoique qu'il est facile de connaître les quelques prochains numéros dans la deuxième suite $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$, (ils sont $\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$) d'énoncer la règle pour le $n^{\text{ème}}$ terme est un peu plus difficile:
  - Un étudiant avec un bon sens d'observation verra peut-être que le $n^{\text{ème}}$ terme est de la forme $\frac{n}{\text{dénominateur}}$.
  - Ensuite on voit que le dénominateur est toujours 1 de plus que le numérateur, et donc on en déduit que le $n^{\text{ème}}$ terme de cette suite est $\frac{n}{n+1}$
  - On peut donc la décrire comme suit: $\{\frac{n}{n+1} : n = 1, 2, 3 \ldots\}$ ou tout simplement $\{\frac{n}{n+1}\}$
- Dans le troisième exemple on voit que les numéros sont tous des entiers qui se suivent mais que le signe alterne, et le premier terme n'est pas 0 ou 1 mais -2. Nous tentons donc de décrire le $n^{\text{ème}}$ terme:
  - Si pour commencer on ignorait les signes qui alternent on pourrait décrire cette suite comme suit: $\{n : n = -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Ou encore mieux, $\{n - 3 : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.
  - On fait maintenant la gestion des signes.
    * On voit que lorsque n est impair $n - 3$ est pair et que les nombres pairs sont tous négatifs.

  * Donc lorsque n est impair il faut multiplier le nombre pair $n-3$ par $(-1)^n$.
  * On décrit donc cette suite comme suit: $\{(-1)^n(n-3) : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.
  * Lorsqu'on a établi une régle pour le $n^{\text{ème}}$ terme il faut toujours la mettre à l'épreuve pour s'assurer qu'elle décrit correctement la suite.

- La suite $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ se décrit comme suit: $\{(-1)^{n+1} : n = 1, 2, 3 \ldots\}$.

Lorsqu'on nous donne la régle pour le $n^{\text{ème}}$ terme il est généralement assez facile d'écrire les premiers termes. Par exemple:

- L'expression $\{\frac{1}{2^{n-1}} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ décrit la suite $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$
- L'expression $\{n^2 + 3n + 1 : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ décrit la suite $\{5, 11, 19, 29, 41, \ldots\}$.
  - Dans ce cas-ci il serait difficile d'extraire la règle $n^2 + 3n + 1$ si on nous donnait de prime abord que les premiers termes $\{5, 11, 19, 29, 41, \ldots\}$.
- L'expression $\{\frac{5}{3^n} : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ décrit la suite $\{5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots\}$
- L'expression $\{2^n : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ décrit la suite $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$

Une observation intéressante:

- Supposons qu'on vous donne les quelques premiers termes d'une suite, disons la suite $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\}$, et on vous demande de trouver la formule pour le $n^{\text{ème}}$ terme.
- Vous pourriez suprendre votre interlocuteur en donnant une réponse inattendue et pourtant très correcte:
  - Il est évident que la formule $\frac{1}{n^3}$ respecte bien les 4 premières valeurs de la suite et constitue donc une réponse acceptable comme représante du $n^{\text{ème}}$ terme. La suite qu'on obtient avec cette formule est
$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{2\,187}, \ldots\right\}$$
  - Mais l'expression $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \frac{1}{n^3}$ respecte également les 4 premiers termes de cette suite tout en donnant des valeurs entièrement différentes pour les termes qui suivent! Les termes de cette suite sont
$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, 24 + \frac{1}{243}, 120 + \frac{1}{729}, 720 + \frac{1}{2\,187} \ldots\right\}$$
et donc votre interlocuteur, quoique un peu surpris, doit admettre que votre réponse est également tout à fait correcte.

Exemples

1. Trouver l'expression qui représente le $n^{\text{ème}}$ terme des suites suivantes:

   (a) $\{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$

   (b) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$

   (c) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots\}$

   Réponses:

   (a) $\{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\} = \{1 + 3n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

   (b) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\} = \{n^2 : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

   (c) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots\} = \{\frac{2n-1}{2n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Trouver le $100^{\text{ème}}$ terme de la suite $\{0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, \ldots\}$.

Réponse: Lorsque n est impair le $n^{\text{ème}}$ terme est $n - 1$, lorsque n est pair le $n^{\text{ème}}$ terme est $n + 1$. Donc le $100^{\text{ème}}$ terme de la suite $\{0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, \ldots\}$ est $100 + 1 = 101$ (puisque 100 est pair).