

## Les triples pythagoréens

- Le théorème de Pythagore énonce que pour tout triangle rectangle dont les côtés mesurent  $a$ ,  $b$  et  $c$  où  $c$  représente la longueur du côté le plus long (l'hypoténuse)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Avant d'aborder ce qui suit voir, si ce n'est pas déjà fait, sur la page des Concepts mathématiques le concept intitulé *Théorème de Pythagore*. On y trouve une preuve simple du *Théorème de Pythagore*.

- Au niveau intermédiaire lorsqu'on présente pour la première fois le théorème de Pythagore on utilise normalement comme exemple le triangle rectangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 unités.
  - \* Les enseignants utilisent cet exemple pour des raisons évidentes: premièrement il est facile de se souvenir de ces trois entiers. Deuxièmement, puisque l'expression  $3^2 + 4^2 = 5^2$  ne contient que de petits nombres entiers, le calcul peut se faire mentalement sans avoir recours à un crayon et une feuille de papier.
- Pourtant il existe plusieurs autres triples de nombres entiers  $a$ ,  $b$ , et  $c$  satisfaisant l'équation  $a^2 + b^2 = c^2$
- Par exemple:  $5^2 + 12^2 = 13^2$  et  $9^2 + 40^2 = 41^2$ 
  - \* Existe-t-il un triangle rectangle dont les dimensions sont 5, 12 et 13? Certainement. En voici la preuve.
    - Soit un triangle rectangle dont les côtés les plus courts mesurent 5 et 12 et l'hypoténuse mesure  $c$  unités.
    - Donc, d'après le Théorème de Pythagore, l'hypoténuse mesure  $c = \sqrt{5^2 + 12^2}$ .
    - Mais nous savons aussi que  $13 = \sqrt{5^2 + 12^2}$ .
    - Nous devons conclure que  $c = 13$ .
    - Donc le triangle dont les côtés mesure 5, 12 et 13 doit être le triangle rectangle dont les cotés mesure 5, 12, et  $c$ . (Nous faisons appel à un principe de géométrie qui dicte que deux triangles dont les trois côtés sont de même longueur sont une représentation du même triangle.)

- Pour des raisons évidentes, il serait utile de connaître plusieurs triples de nombres entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  satisfaisant l'équation  $a^2 + b^2 = c^2$ .
  - En procédant par essai et erreur on trouvera peut-être éventuellement que  $9^2 + 40^2 = 41^2$  et que  $9^2 + 12^2 = 15^2$ .
  - Mais à un moment donné on pourrait se poser la question: est-ce qu'il existe plusieurs triples de nombres entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  qui formeraient, ensemble, les côtés d'un triangle rectangle?
  - La question a déjà été posée. Nous appelons les triples de nombres entiers  $(a, b, c)$  qui satisfont l'équation  $a^2 + b^2 = c^2$  des *triples Pythagoréens*.
    - \* Les triples  $(3, 4, 5)$ ,  $(5, 12, 13)$  et  $(9, 40, 41)$  sont des exemples de *triples pythagoréens*.
- En fait il existe plusieurs façons simples de construire un nombre infini de triples pythagoréens. En voici une.
  - Nous savons que  $(3, 4, 5)$  est un triple pythagoréen.
  - Nous démontrons que, pour tout nombre entier positif  $n$ ,  $(3n, 4n, 5n)$  est un triple pythagoréen.

$$\begin{aligned}
 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\
 n^2(3^2 + 4^2) &= n^2 5^2 \\
 n^2 3^2 + n^2 4^2 &= n^2 5^2 && \text{Principe de distributivité} \\
 (3n)^2 + (4n)^2 &= (5n)^2 && \text{Propriété des exposants}
 \end{aligned}$$

- Donc pour tout nombre entier positif  $n$ ,  $(3n, 4n, 5n)$  est un triple pythagoréen.

$$(3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20) \dots$$

sont tous des triples pythagoréens. Vérifiez que  $12^2 + 16^2 = 20^2$ .

- Les triples pythagoréens  $(a, b, c)$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne partagent pas de facteurs communs autre que 1 sont appelés *triples pythagoréens primitifs*.
  - Dans l'ensemble de tous les triples pythagoréens de forme  $(3n, 4n, 5n)$ , le seul triple pythagoréen primitif c'est  $(3, 4, 5)$ .

- Les triples pythagoréens (5, 12, 13) et (9, 40, 41) sont primitifs.
- Nous présentons une façon de construire un ensemble infini de triples pythagoréens primitifs. Ce qui suit vise le lecteur qui est à l'aise avec la notion de distributivité.

– Soient deux entiers positifs  $n$  et  $m$  où  $n$  et  $m$  n'ont pas de facteurs communs autres que 1.

– Nous démontrons que le triple  $(a, b, c) = (n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2)$  est pythagoréen.

\* Il ne s'agit que de suivre la chaîne d'égalités suivante:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= (n^2 - m^2)^2 + (2nm)^2 \\
 &= (n^4 - 2n^2m^2 + m^4) + 4n^2m^2 \\
 &= n^4 - 2n^2m^2 + 4n^2m^2 + m^4 \\
 &= n^4 + 2n^2m^2 + m^4 \\
 &= (n^2 + m^2)^2 \\
 &= c^2
 \end{aligned}$$

\* On conclut que  $(a, b, c) = (n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2)$  est un triple pythagoréen.

– Il est possible de démontrer que si  $n$  et  $m$  ont seulement 1 comme facteur commun le seul facteur de  $n^2 + m^2$  est 1 et donc le seul facteur commun de  $n^2 - m^2$ ,  $2nm$  et  $n^2 + m^2$  est 1.

– Et donc tous ces triples pythagoréens de forme  $(a, b, c) = (n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2)$  sont primitifs. Nous ne prouverons pas ce fait ici.

- Voici une liste de nombres pythagoréens primitifs formés d'entiers plus petit que 1000.

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)	(8, 15, 17)	(9, 40, 41)	(11, 60, 61)
(12, 35, 37)	(13, 84, 85)	(15, 112, 113)	(16, 63, 65)	(17, 144, 145)	(19, 180, 181)
(20, 21, 29)	(20, 99, 101)	(21, 220, 221)	(23, 264, 265)	(24, 143, 145)	(25, 312, 313)
(27, 364, 365)	(28, 45, 53)	(28, 195, 197)	(29, 420, 421)	(31, 480, 481)	(32, 255, 257)
(33, 56, 65)	(33, 544, 545)	(35, 612, 613)	(36, 77, 85)	(36, 323, 325)	(37, 684, 685)
(37, 684, 685)	(39, 80, 89)	(39, 760, 761)	(40, 399, 401)	(41, 840, 841)	(43, 924, 925)
(44, 117, 125)	(44, 483, 485)	(48, 55, 73)	(48, 575, 577)	(51, 140, 149)	(52, 165, 173)
(52, 675, 677)	(56, 783, 785)	(57, 176, 185)	(60, 91, 109)	(60, 221, 229)	(60, 899, 901)
(65, 72, 97)	(68, 285, 293)	(69, 260, 269)	(75, 308, 317)	(76, 357, 365)	(84, 187, 205)
(84, 437, 445)	(85, 132, 157)	(87, 416, 425)	(88, 105, 137)	(92, 525, 533)	(93, 476, 485)
(95, 168, 193)	(96, 247, 265)	(100, 621, 629)	(104, 153, 185)	(105, 208, 233)	(105, 608, 617)
(108, 725, 733)	(111, 680, 689)	(115, 252, 277)	(116, 837, 845)	(119, 120, 169)	(120, 209, 241)
(120, 391, 409)	(123, 836, 845)	(124, 957, 965)	(129, 920, 929)	(132, 475, 493)	(133, 156, 205)
(135, 352, 377)	(136, 273, 305)	(140, 171, 221)	(145, 408, 433)	(152, 345, 377)	(155, 468, 493)
(156, 667, 685)	(160, 231, 281)	(161, 240, 289)	(165, 532, 557)	(168, 425, 457)	(168, 775, 793)
(175, 288, 337)	(180, 299, 349)	(184, 513, 545)	(185, 672, 697)	(189, 340, 389)	(195, 748, 773)

(200,609,641) (203,396,445) (204,253,325) (205,828,853) (207,224,305) (215,912,937)  
(216,713,745) (217,456,505) (220,459,509) (225,272,353) (228,325,397) (231,520,569)  
(232,825,857) (240,551,601) (248,945,977) (252,275,373) (259,660,709) (260,651,701)  
(261,380,461) (273,736,785) (276,493,565) (279,440,521) (280,351,449) (280,759,809)  
(287,816,865) (297,304,425) (300,589,661) (301,900,949) (308,435,533) (315,572,653)  
(319,360,481) (333,644,725) (336,377,505) (336,527,625) (341,420,541) (348,805,877)  
(364,627,725) (368,465,593) (369,800,881) (372,925,997) (385,552,673) (387,884,965)  
(396,403,565) (400,561,689) (407,624,745) (420,851,949) (429,460,629) (429,700,821)  
(432,665,793) (451,780,901) (455,528,697) (464,777,905) (468,595,757) (473,864,985)  
(481,600,769) (504,703,865) (533,756,925) (540,629,829) (555,572,797) (580,741,941)  
(615,728,953) (616,663,905) (696,697,985)