Concours Pythagore

Édition 2009-10

Questions C5.

Directives : Lis attentivement les questions ci-dessous et tente d'en résoudre autant que tu peux. Certaines te paraîtront tout à fait accessibles tandis que d'autres nécessiteront une peu plus de réflexion. (Pour certaines d'entre elles, même les plus doués(es) y verront leurs talents mis à l'épreuve.) On n'y perd rien en essayant ; et surtout il ne faut pas s'en faire si on n'arrive à en décortiquer que quelques-unes. De fait, rares seront les participants qui réussiront à maîtriser tous les problèmes posés. L'important c'est d'y faire son possible en y voyant une occasion d'apprendre quelque chose de nouveau. N'ais pas peur de discuter de certains concepts avec d'autres ou d'approcher ton professeur afin qu'il ou elle t'aide à mieux comprendre certains principes qui t'échappent. En justifiant chaque étape clairement, rédige tes réponses sur une feuille séparée et remet la à ton professeur.

$\left[\frac{1}{2}\right]$ C5.1 Supposons que la fraction $\frac{3m+14}{m}$ et m sont des entiers positifs quelle est la valeur maximale de m ?

$\left[\frac{1}{2}\right]$ C5.2 Supposons que la valeur de x est telle que $\sin x = \cos x$. Quelles serait donc la valeur de $\sin x \cos x$?

$\left[\frac{1}{2}\right]$ C5.3 Supposons que la valeur de x est telle que $\sin x = 5\cos x$. Quelles serait donc la valeur de $\sin x \cos x$?

$\left[\frac{1}{2}\right]$ C5.4 Si $g(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + x + 5$ et $g(-1) = -2$ quelle est la valeur de $g(1)$?

[1] C5.5 Trouve toutes les racines de l'équation $x^{\log_{100} x} = 100$.

[1] C5.6 Résoudre $|x-5| + |5-x| = 5$

[1] C5.7 Les longueurs des trois côtés d'un triangle $\triangle ABC$ sont les trois premiers termes $\{a, ar, ar^2\}$ d'une suite géométrique ($a \neq 0$). Quelles sont les valeurs possibles de r ?

[2] C5.8 Soit une parabole $y = ax^2$ ouverte vers le haut et un cercle de rayon r avec son centre $(h,k) = (0,r)$ sur l'axe positif des ordonnées. Si le cercle rencontre la parabole en un seul point quelle est la valeur de r ?

[2] C5.9 On dit qu'un entier d est un *diviseur* de l'entier n s'il existe un entier k tel que $n = kd$. (Un entier $n \neq 1$ non nul a toujours au moins deux diviseurs, soit 1 et lui-même.) Si m, $3m+7$ et $2m+5$ sont des entiers positifs et nous voulons réduire la fraction $\frac{3m+7}{2m+5}$ en factorisant un entier positif autre que 1 de $3m+7$ et de $2m+5$ quelle est la plus petite valeur possible de m ?

Total = 10

[2] **Question subsidiaire* :** Supposons que nous ayons trois suites de numéros :

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots,\}$$

$$B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n, \ldots,\}$$

$$C = \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_n, \ldots,\}$$

Dans la suite A, $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$ et chaque nombre qui suit est le produit de ses deux prédécesseurs ; c'est-à -dire, $a_2 = a_1 \times a_0 = 1 \times 2 = 1$, $a_3 = a_2 \times a_1 = 2 \times 2 = 4$, et ainsi de suite. Pour la suite B, $b_0 = 32^0 = 1$, $b_1 = 32^1$, $b_2 = 32^2$, $b_3 = 32^3$ et $b_n = 32^n$. Pour la troisième suite C, on définit les termes comme suit :

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

Trouve la valeur de c_{10}.

*Question supplémentaire destinée à départager les concurrents ex aequo.

© Club Pythagore, 2009