Problèmes ouverts

De nombreux problèmes mathématiques résistent encore à tous nos efforts pour les résoudre. Nous en énumérons ici quelques-uns. Nous n'énoncerons que des problèmes qui nécessitent aucune formation particulière pour les comprendre. Si les solutions de ces questions nous échappent toujours c'est qu'elles sont particulièrement difficiles ou peut-être nous n'avons tout simplement pas encore développé les outils mathématiques nécessaires pour les aborder efficacement.

1. **La conjecture des nombres premiers jumeaux**: Deux nombres impairs consécutifs tous deux premiers sont appelés des *nombres premiers jumeaux*. Par exemple 3 et 5, 41 et 43, 1000 000 000 061 et 1000 000 000 063. Trois cents ans av. J.-C., Euclide a formulé la conjecture qu'il existe un nombre infini de nombres premiers jumeaux. Personne n'a encore réussi à la prouver. Aux dernières nouvelles, la plus grande paire de nombres jumeaux connus est $2\ 003\ 663\ 613 \times 2^{195000} \pm 1$ (trouvé au mois de janvier 2007).

2. **Les nombres premiers de la forme** $n^2 + 1$. Plusieurs nombres premiers sont de la forme $n^2 + 1$ où n est un entier positif. Par exemple:

$$\begin{aligned}
2 &= 1^2 + 1 \\
5 &= 2^2 + 1 \\
17 &= 4^2 + 1 \\
37 &= 6^2 + 1 \\
101 &= 10^2 + 1 \\
197 &= 14^2 + 1 \\
257 &= 16^2 + 1 \\
401 &= 20^2 + 1
\end{aligned}$$

   Nous n'avons toujours pas réussi à prouver qu'il existe un nombre infini de ce genre de nombre premier.

3. **Une conjecture du mathématicien Legendre** : Le mathématicien A. Legendre (1752-1833) a émis la conjecture que, peu importe la valeur de l'entier n, il existe au moins un nombre premier entre les deux entiers n^2 et $(n + 1)^2$. Cette affirmation n'a pas encore été prouvée et donc elle demeure un problème ouvert.

4. **Les nombres premiers de la forme** $n^n + 1$: Nous savons que pour $n = 1, 2$ et 4, $n^n + 1$ donne les nombres premiers 2, 5, et 257 respectivement Nous ne savons toujours pas s'il existe d'autres nombres premiers du genre $n^n + 1$ pour un entier n.

5. **Les nombres parfaits impairs** : Un *nombre parfait* est un nombre n qui est la somme de ses diviseurs (à l'exclusion de lui-même).

   - Par exemple, $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Les 10 premiers nombres parfaits sont:

     6
     28
     496
     8 128
     33 550 336
     8 589 869 056
     137 438 691 328
     2 305 843 008 139 952 128
     2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176
     191 561 942 608 236 107 294 793 378 084 303 638 130 997 321 548 169 216

   - Il a été prouvé de façon irréfutable que les nombres parfaits **pairs** sont précisément les nombres m qui peuvent s'écrire sous la forme $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre premier.
     - On appelle les nombres premiers qui peuvent s'écrire sous la forme $2^n - 1$ des *nombres de Mersenne*.
     - Pour les 5 nombres parfaits ci-dessus nous avons:

$$
\begin{array}{lclcl}
6 & = & 2 \times 3 & = & 2^{2-1}(2^2 - 1) \\
28 & = & 4 \times 7 & = & 2^{3-1}(2^3 - 1) \\
486 & = & 16 \times 31 & = & 2^{5-1}(2^5 - 1) \\
8\ 128 & = & 64 \times 127 & = & 2^{7-1}(2^7 - 1) \\
33\ 550\ 336 & = & 4\ 096 \times 8\ 191 & = & 2^{13-1}(2^{13} - 1)
\end{array}
$$

     - Et donc la chasse aux nombres de Mersenne c'est la chasse au nombres parfaits puisque une fois avoir trouvé un nombre de Mersenne nous en sommes qu'à une étape d'obtenir un nombre parfait.
     - En septembre 2006 on a découvert le 44$^{\text{ème}}$ nombre de Mersenne et donc nous pouvons, à partir de celui-ci, déduire le 44$^{\text{ème}}$ nombre parfait. (Le 44$^{\text{ème}}$ nombre de Mersenne est énorme: il est consitué de 9 808 358 chiffres!)
   - Existe-t-il des nombres parfaits qui sont impairs? À date personne n'a réussi à en trouver un ou démontrer qu'il n'en n'exists pas.

6. **La conjecture de Goldbach**: Tout nombre n pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. Par exemple :

$$\begin{aligned} 4 &= 2+2 \\ 14 &= 3+11 \\ 96 &= 7+89 \\ 188 &= 47+141 \end{aligned}$$

La conjecture est vraie pour tous les entiers pairs inférieurs à 20 000 000. Nous ne savons toujours pas de façon sûre et certaine si cette affirmation est vraie pour tous les nombres pairs n.

7. **La conjecture de Collatz**: On part d'un nombre entier positif quelconque n. S'il est pair, on le divise par 2, soit $\frac{n}{2}$. Sinon, on le multiplie par 3 et on ajoute 1, soit $3n+1$. Et on répète le processus aussi longtemps que nécessaire. Par exemple, si $n = 26$:

$26/2 = 13$, $3 \cdot 13 + 1 = 40$, $40/2 = 20$, $20/2 = 10$, $10/2 = 5$, $3 \cdot 5 + 1 = 16$, $16/2 = 8$, $8/2 = 4$, $4/2 = 2$, $2/2 = 1$.

On constate que quelque soit n, le processus se termine toujours par 1. Est-ce le cas peu importe la valeur de n?